Propagazione in mezzi non dissipativi

Mezzo privo di dissipazioni ($g = \epsilon'' = 0$)

Si ricava $\mathbf{H}$ dalla prima equazione di Maxwell e si sostituisce nella seconda

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = (j\omega\epsilon)(-j\omega\mu_0)\mathbf{E} = k^2 \mathbf{E}$$

dove si è posto $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon$.

Dato che all'esterno delle sorgenti

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \nabla\epsilon + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon} \mathbf{E} \cdot \nabla\epsilon$$

da cui

$$\nabla\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{1}{\epsilon} \mathbf{E} \cdot \nabla\epsilon \right)$$

e quindi

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} + \nabla\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon}\right) = 0$$

Mezzo debolmente disomogeneo: $|\nabla\epsilon| \to 0$

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2(\mathbf{r})\mathbf{E} = 0$$

equazione delle onde

si ha anche per per $\omega \to \infty$: altissime frequenze, ottica ($f > 100$ THz) geometrica.

L'equazione delle onde vale in modo approssimato per qualsiasi coppia $|\nabla\epsilon|$ e ω tale che

$$\left|\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon}\right| \ll k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon$$

approssimazione per radiofrequenze e microonde in mezzi debolmente disomogenei.

La funzione di fase

Posto: indice di rifrazione $n(\mathbf{r}) = \sqrt{\epsilon'(\mathbf{r})}$, $\kappa_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, $k(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})\kappa_0$

$$\nabla^2\mathbf{E} + \kappa_0^2 n^2(\mathbf{r})\mathbf{E} = 0$$

Ipotizziamo che la soluzione $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ abbia la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\kappa_0\Phi(\mathbf{r})}$$

con $\mathbf{E}_0$ indipendente dalle coordinate, Φ funzione reale di punto.

Per essere accettabile, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ deve soddisfare l'equazione delle onde:

$$\nabla^2\mathbf{E}_0 e^{-j\kappa_0\Phi(\mathbf{r})} + \kappa_0^2 n^2(\mathbf{r})\mathbf{E}_0 e^{-j\kappa_0\Phi(\mathbf{r})} = 0$$

ovvero

$$\mathbf{E}_0\nabla^2 e^{-j\kappa_0\Phi(\mathbf{r})} + \kappa_0^2 n^2(\mathbf{r})\mathbf{E}_0 e^{-j\kappa_0\Phi(\mathbf{r})} = 0$$

Dato che

$$\nabla^2 e^{-j\kappa_0\Phi} = -j\kappa_0 \left(-j\kappa_0 \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \nabla^2\Phi\right) e^{-j\kappa_0\Phi}$$

per soddisfare l'equazione è necessario che

$$-j\kappa_0 \left(-j\kappa_0 \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \nabla^2\Phi\right) + \kappa_0^2 n^2 = 0$$

cioè

$$-\kappa_0^2 \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi - j\kappa_0 \nabla^2\Phi + \kappa_0^2 n^2 = 0$$

e quindi

$$\begin{cases} n^2 - \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = 0 \\ \nabla^2\Phi = 0 \end{cases}$$

$n^2 - |\nabla\Phi|^2 = 0$ equazione eiconale

fornisce la funzione di fase $\Phi(\mathbf{r})$ compatibile con n(**r**).

TOR VERGATA

L'onda elettromagnetica

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\kappa_0 \Phi(\mathbf{r})}$$

vettore complesso, prodotto di un fattore vettoriale $\mathbf{E}_0$, che determina ampiezza e polarizzazione, per un fattore di fase $e^{-j\kappa_0 \Phi(\mathbf{r})}$

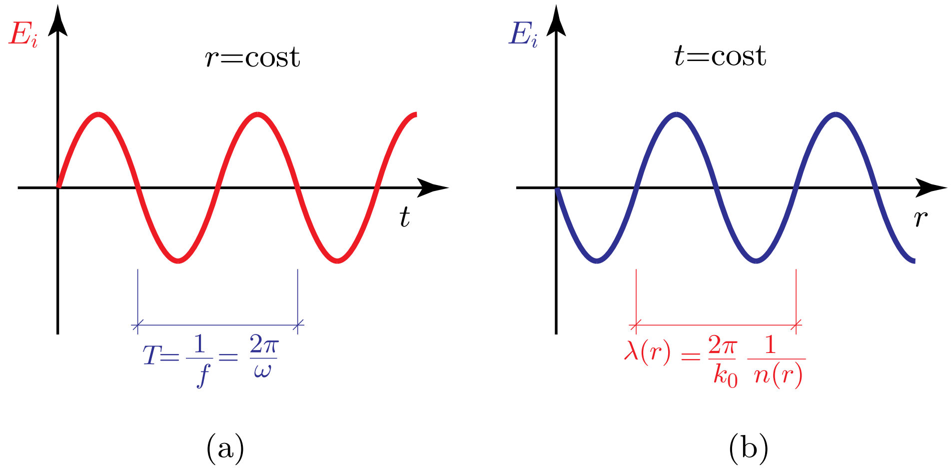
Campo funzione dello spazio e del tempo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R}e\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}\right] = \mathcal{R}e\left[\mathbf{E}_0 e^{-j[\kappa_0 \Phi(\mathbf{r}) - \omega t]}\right]$$

fattore $e^{-j[\kappa_0 \Phi(\mathbf{r}) - \omega t]}$ funzione dello spazio e del tempo.

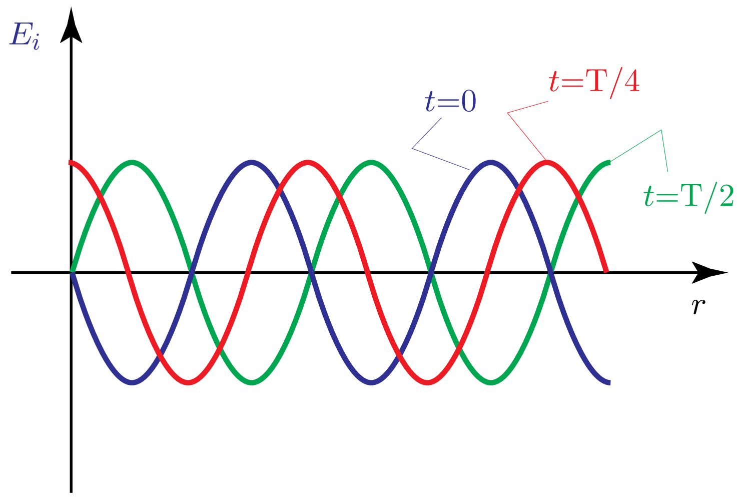
Assunto $\mathbf{E}_0$ reale, le componenti di $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ in funzione dell'ascissa r lungo una direzione $\mathbf{r}_0$, nell'intorno di $\mathbf{r}$ sono

$$E_i(r, t) = E_{0i} \cos[\kappa_0 \Phi(r) - \omega t] \qquad i = x, y, z$$



- in ciascun punto dello spazio le componenti del campo sono funzioni sinusoidali del tempo

- fissato un istante, le componenti sono funzioni sinusoidali dell'ascissa r in intorni di ciascun punto sufficientemente piccoli affinché la fase possa essere considerata funzione lineare dell'ascissa $\Longrightarrow$ lunghezza d'onda locale $\lambda(r)$, periodicità spaziale del campo, variabile lentamente nello spazio.



In istanti successivi: il valore della E_i rimane invariato per ascisse r crescenti, tali che $\kappa_0 \Phi(r)$ compensa la variazione di ωt

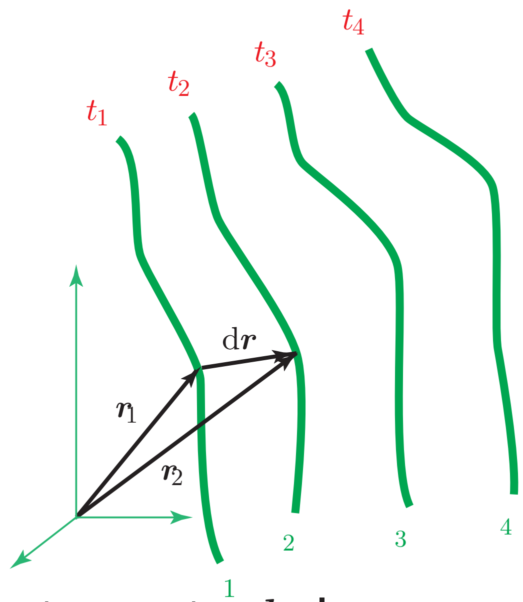
la sinusoide che rappresenta ciascuna componente E_i trasla $\Longrightarrow$ l'onda si propaga

Nello spazio, $E_i(\mathbf{r}) = cost$ se

$$\kappa_0 \Phi(\mathbf{r}) - \omega t = cost$$

rappresenta una superficie nello spazio (superficie d'onda) per ogni istante t

al trascorrere del tempo la superficie d'onda trasla $\Longrightarrow$ l'onda si propaga nello spazio.



Se il tempo varia di dt, lo spostamento dr lungo $\mathbf{r}_0$ che annulla il differenziale è

$$\kappa_0(\nabla\Phi)\cdot\mathbf{r}_0 dr - \omega dt = 0$$

velocità di propagazione nella direzione $\mathbf{r}_0$:

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{\mathbf{r}_0} = \frac{\omega}{\kappa_0\nabla\Phi\cdot\mathbf{r}_0} = u|_{\mathbf{r}_0}$$

La velocità u dipende da $\mathbf{r}_0$.

- Se $\mathbf{r}_0 // \nabla\Phi$,

$$u = \frac{\omega}{\kappa_0 |\nabla\Phi|} = \frac{\omega}{\kappa_0 n} = \frac{c_0}{n} \qquad \text{minima}$$

con $c_0 \simeq 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}

u$_{min}$ è la “velocità di propagazione”;

- se $\mathbf{r}_0 \perp \nabla\Phi$, $\quad u \to \infty$ (non è velocità di trasporto).

Relazioni tra campi e direzione di propagazione

Se $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\kappa_0 \Phi(\mathbf{r})}$, anche $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-j\kappa_0 \Phi(\mathbf{r})}$

Dalla prima equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \left[\mathbf{E}_0 \, e^{-j\kappa_0 \Phi(\mathbf{r})}\right] = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 \, e^{-j\kappa_0 \Phi(\mathbf{r})}$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}_0) e^{-j\kappa_0 \Phi(\mathbf{r})} - \mathbf{E}_0 \times \nabla e^{-j\kappa_0 \Phi(\mathbf{r})} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 e^{-j\kappa_0 \Phi(\mathbf{r})}$$

$$-\mathbf{E}_0 \times [-j\kappa_0 \nabla\Phi(\mathbf{r})] = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_0$$

$$j\kappa_0 \nabla\Phi \times \mathbf{E}_0 = j\omega\mu_0 \mathbf{H}_0$$

$$\nabla\Phi \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \, \mathbf{H}_0$$

Analogamente, dalla seconda equazione di Maxwell:

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0 = -\frac{\epsilon \mathbf{E}_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Posto

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} && \text{impedenza intrinseca del vuoto} \\ \eta &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} && \text{impedenza intrinseca del mezzo} \\ \nabla\Phi &= |\nabla\Phi|\mathbf{s}_0 = n\mathbf{s}_0 = \sqrt{\epsilon'}\,\mathbf{s}_0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\nabla\Phi \times \mathbf{E}_0}{\eta_0} = \frac{\sqrt{\epsilon'}\,\mathbf{s}_0 \times \mathbf{E}_0}{\eta_0} = \frac{1}{\eta}\,\mathbf{s}_0 \times \mathbf{E}_0$$

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{\nabla\Phi \times \mathbf{H}_0}{\frac{\epsilon}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}} = -\eta\,\mathbf{s}_0 \times \mathbf{H}_0$$

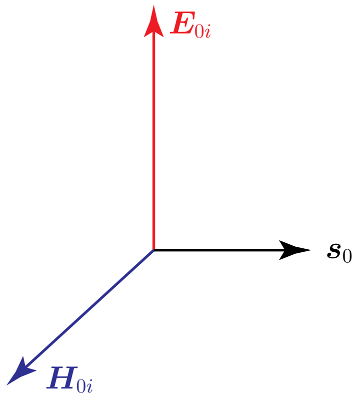
Dato che

$$\mathbf{E}_0 = |\mathbf{E}_0|\mathbf{e}_0, \qquad \mathbf{H}_0 = |\mathbf{H}_0|\mathbf{h}_0$$

essendo $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{h}_0$ ed $\mathbf{s}_0$ unitari,

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{s}_0 \times \mathbf{e}_0; \qquad \mathbf{e}_0 = -\mathbf{s}_0 \times \mathbf{h}_0$$

componenti reali e immaginari di $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{H}_0$ sono ortogonali rispettivamente e alla direzione di propagazione $\mathbf{s}_0$ e formano una terna trirettangola destra.



Raggi elettromagnetici

Vettore di Poynting

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^\star = \frac{1}{2}\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_\mathbf{0}^\star = \frac{1}{2}\mathbf{E}_0 \times \frac{\mathbf{s}_0 \times \mathbf{E}_0^\star}{\eta} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^\star}{\eta}\,\mathbf{s}_0$$

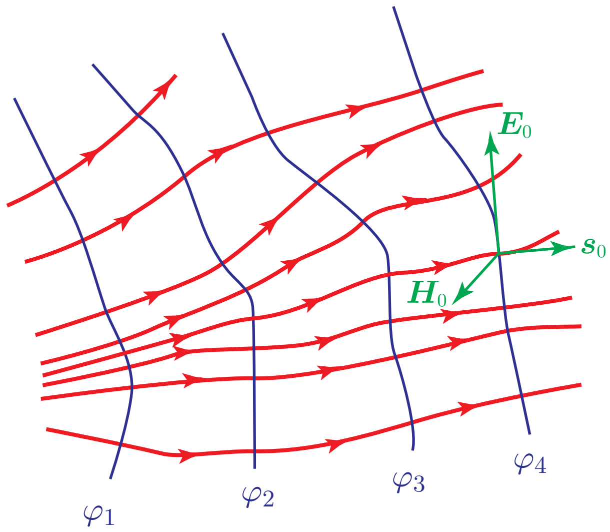
ha direzione e verso di $\mathbf{s}_0$, ortogonale alle superfici d'onda $\Phi(\mathbf{r}) = cost$

il trasporto di potenza avviene ortogonalmente alle $\Phi(\mathbf{r}) = cost$

curve ortogonali in ogni punto alle superfici d'onda sono traiettorie dell'energia elettromagnetica

raggi elettromagnetici

TOR VERGATA



L'uso dei raggi elettromagnetici riduce il problema della propagazione da tridimensionale a monodimensionale

va determinato il *raggio* (linea che congiunge la sorgente con il punto di ricezione)

vanno determinate ampiezza, fase e polarizzazione del campo lungo il raggio

la traiettoria elettromagnetica dipende dalla distribuzione spaziale dell'indice di rifrazione e dalla direzione iniziale di propagazione

Dalla $\nabla\Phi = n\mathbf{s}_0$,

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{s}_0 = \frac{d\Phi}{ds} = n$$

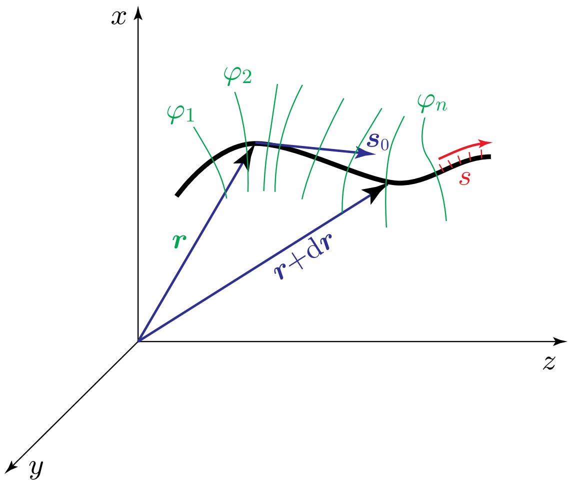
se s è l'ascissa curvilinea lungo il raggio. Quindi

$$\nabla n = \nabla\frac{d\Phi}{ds} = \frac{d}{ds}\nabla\Phi = \frac{d}{ds}(n\mathbf{s}_0)$$

per definizione, $\mathbf{s}_0 = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$, per cui

$$\frac{d}{ds}\left[n(\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right] = \nabla n$$

equazione del raggio: individua il raggio elettromagnetico come traiettoria dell'estremo libero del vettore posizione $\mathbf{r}$ al variare dell'ascissa curvilinea s.



Poiché

$$\frac{d}{ds}(n\mathrm{s}_0) = \mathrm{s}_0\frac{dn}{ds} + n\frac{d\mathrm{s}_0}{ds} = \nabla n$$

il raggio rimane localmente confinato nel piano individuato da s_0 e ∇n
la traiettoria si incurva nel piano che contiene la direzione di massima variazione dell'indice di rifrazione.

TOR VERGATA

Per definizione, la curvatura $\frac{1}{\rho}$ del raggio elettromagnetico è data da

$$\frac{\mathbf{n}_0}{\rho} = \frac{d\mathbf{s}_0}{ds}$$

con $\mathbf{n}_0$ normale principale della curva

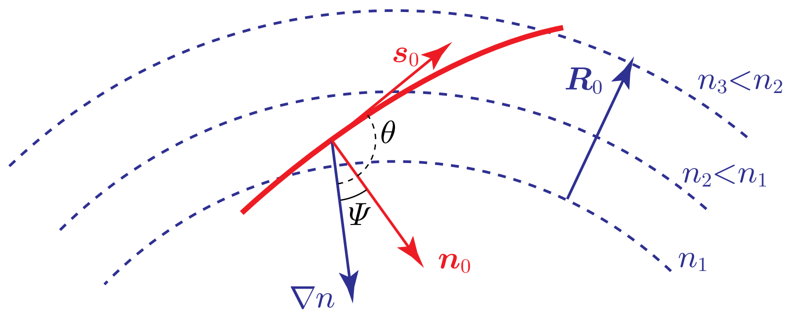
$$\frac{1}{\rho} = \mathbf{n}_0 \cdot \frac{d\mathbf{s}_0}{ds} = \mathbf{n}_0 \cdot \left(\frac{\nabla n}{n} - \frac{\mathbf{s}_0}{n}\frac{dn}{ds}\right) = \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\nabla n}{n}$$

a parità di n, la curvatura aumenta con $|\nabla n|$ e la concavità ($\rho > 0$) è rivolta verso la regione con indice di rifrazione crescente.

Il raggio elettromagnetico è localmente rettilineo se $\mathbf{s}_0 // \nabla n$

se il mezzo è omogeneo, il raggio è rettilineo ovunque

Raggi in mezzi stratificati radialmente



Indice di rifrazione a simmetria sferica: atmosfera terrestre

$$\nabla n = -|\nabla n|\mathbf{R}_0 \quad \text{(troposfera)}$$

$$\frac{d\mathbf{s}_0}{ds} = -\frac{|\nabla n|}{n}\mathbf{R}_0 - \frac{\mathbf{s}_0}{n}\frac{dn}{ds}$$

il raggio è confinato nel piano radiale che contiene $\mathbf{s}_0$ ed è incurvato verso il basso con curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\nabla n}{n} = \frac{|\nabla n|}{n}\cos\psi = \frac{|\nabla n|}{n}\sin\theta$$

TOR VERGATA

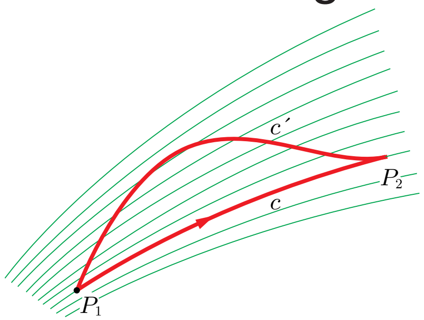
Principio di Fermat e lunghezza di percorso

Un raggio elettromagnetico che passa per due punti P_1 e P_2 è tale che la lunghezza $\mathcal{L}$ del percorso elettromagnetico

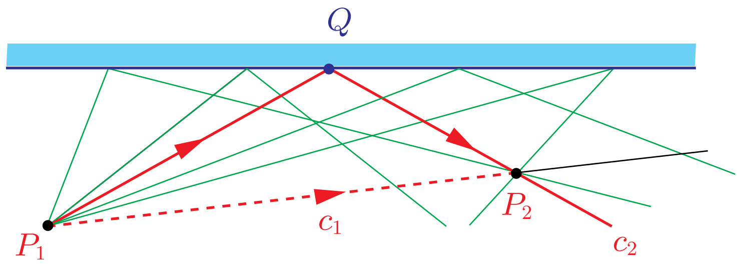
$$\mathcal{L} = \int_{P_1}^{P_2} n(\mathbf{r}) ds$$

funzionale della traiettoria seguita tra P_1 e P_2, è stazionaria

considerata una qualunque curva che congiunge i due punti, quella (o quelle) che rendono stazionario (generalmente minimo) il valore dell'integrale di linea dell'indice di rifrazione è (sono) la/le traiettoria/e dell'energia elettromagnetica



ricerca delle condizioni di stazionarietà: tecnica numerica per determinare i raggi, anche in presenza di riflessioni



Lunghezza del percorso elettromagnetico legata al tempo τ che l'energia elettromagnetica impiega tra due punti, oltre che alla fase ϕ con cui l'onda giunge

noto l'andamento dell'indice di rifrazione, la misura di τ dà la distanza tra trasmettitore e ricevitore

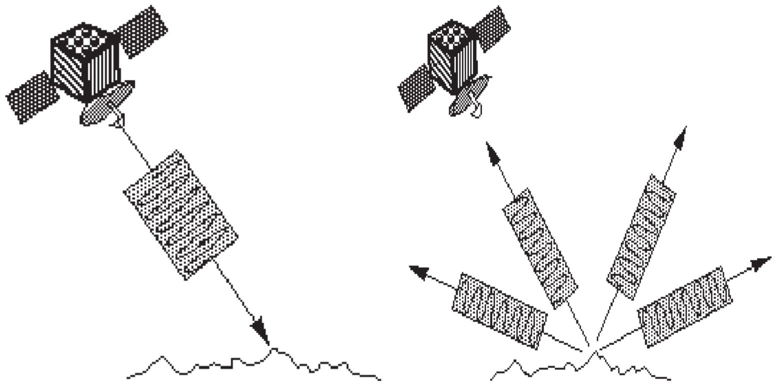
con tre (o piú) trasmettitori, la misura dei tre (o piú) tempi fornisce la posizione (tre coordinate) del ricevitore

sistema di radiolocalizzazione globale satellitare GPS (Global Positioning System)

precisione da alcuni metri alle diverse decine di metri

Radar (radio detection and *ranging*) determina la distanza di un oggetto (nave, aereo, superficie terrestre, ...) dalla misura dell'intervallo di tempo τ tra il momento in cui viene trasmessa l'energia elettromagnetica e quello in cui viene ricevuta l'eco (energia retrodiffusa)

$$R = \frac{\tau \cdot c_0}{2}$$



In condizioni di propagazione controllate, una misura di fase consente di misurare la distanza con precisione spinta alla frazione di lunghezza d'onda