

Capitolo 10

Propagazione guidata da mezzi discontinui

Né la superficie di un materiale conduttore ideale né una discontinuità tra due dielettrici che causi una riflessione totale consentono al campo elettromagnetico di trasferire potenza liberamente da una regione di spazio a un'altra. I meccanismi di riflessione da parte di tali discontinuità possono quindi essere sfruttati per guidare il campo dal *punto* in cui esso viene generato o modificato (per esempio, da un amplificatore) a quello in cui viene utilizzato o ulteriormente elaborato (per esempio, da un filtro). Per realizzare una guida occorre quindi confinare il campo essenzialmente all'interno di una struttura, metallica o dielettrica, che colleghi due punti a una certa distanza tra loro. Le strutture possono essere di tipo tubolare o planare, come i cavi coassiali, le guide d'onda, le microstrisce, che impiegano materiali conduttori, o ancora planari o filiformi dielettrici, analoghe e quelle viste nel paragrafo 7.2 (lamina e fibra a variazione continua di indice, che peraltro si basano su un principio fisico diverso). In ogni caso, la regione di spazio nella quale avviene la propagazione guidata tra i due punti deve essere circondata da materiale metallico o da dielettrico con indice di rifrazione inferiore. Come già osservato nel Cap. 7, il formalismo dei raggi elettromagnetici non è utile per caratterizzare la propagazione guidata, dato che per ogni punto non passa un singolo raggio. È bensì opportuno un approccio complessivo, basato sulla teoria dei modi guidati.

10.1 Il potenziale vettore in strutture cilindriche

Anche nel caso delle guide è conveniente utilizzare una grandezza ausiliaria, come fatto nel paragrafo 5.2.

Introduciamo un potenziale vettore elettrico \mathbf{F} e procediamo per dualità. Poniamo il campo elettrico

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{F} \quad (10.1)$$

la seconda equazione di Maxwell si trasforma in

$$\nabla \times \mathbf{H} = -j\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{F}$$

e il campo magnetico risulta esprimibile come

$$\mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{F} - \nabla U$$

dove U è un potenziale scalare magnetico arbitrario che leghiamo a \mathbf{F} tramite la duale della condizione di Lorentz

$$-\nabla \cdot \mathbf{F} = j\omega\mu U$$

Con questa scelta, supposti omogenei seppur diversi i materiali all'interno e all'esterno della struttura, il potenziale vettore elettrico soddisfa l'equazione delle onde omogenea a coefficienti costanti

$$\nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = 0 \quad (10.2)$$

mentre il campo magnetico è espresso da

$$\mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{F} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{F}}{j\omega\mu} = \frac{1}{j\omega\mu} (k^2 \mathbf{F} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (10.3)$$

Se si fa riferimento a strutture cilindriche, la cui sezione, di forma arbitraria, non varia al variare della coordinata *longitudinale* z , è opportuno tenere separati operatori trasversi (∇_t, ∇_t^2) e longitudinali ($\mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}$) e scrivere la (10.2)

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} = 0$$

Scegliamo ora $\mathbf{F} = F\mathbf{z}_0$, diretto nella direzione longitudinale: il campo elettrico (10.1) diventa

$$\mathbf{E} = - \left(\nabla_t + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F\mathbf{z}_0) = -\nabla_t F \times \mathbf{z}_0$$

e quindi risulta essere trasverso alla direzione longitudinale stessa, ovvero all'asse della struttura. Il potenziale elettrico longitudinale genera quindi onde trasverse elettriche (*TE*) nelle strutture. Queste soluzioni particolari per il campo elettromagnetico sono di notevole importanza in quanto corrispondono in diversi casi alle configurazioni dei modi dominanti. Come ci si può aspettare dalla dualità, la scelta di un potenziale vettore magnetico longitudinale conduce a onde trasverse magnetiche (*TM*).

Sviluppato il secondo termine tra parentesi della (10.3)

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla \left[\left(\nabla_t + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F\mathbf{z}_0) \right] = \nabla \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) = \left(\nabla_t + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \\ &= \nabla_t \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{aligned}$$

il campo magnetico dell'onda TE è dato a sua volta da

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \left[k^2 \mathbf{F} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z^2} + \nabla_t \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) \right]$$

ovvero, dato che la (10.2) si scrive

$$\nabla_t^2 \mathbf{F} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{F} = 0$$

si ha

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) - \frac{\nabla_t^2 F}{j\omega\mu} \mathbf{z}_0 \quad (10.4)$$

Tenuto conto del carattere cilindrico delle strutture che guidano il campo, facciamo ora l'ulteriore scelta di potenziale vettore elettrico fattorizzato (in modo simile a \mathbf{E} nel paragrafo 7.2.1)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = T(x, y)Z(z)\mathbf{z}_0$$

in modo da poter sfruttare la separazione delle variabili nella soluzione della (10.2). Infatti la

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T(x, y) Z(z) + k^2 T(x, y) Z(z) = 0$$

si spezza nelle

$$\nabla_t^2 T + k_t^2 T = 0 \quad (10.5)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \quad (10.6)$$

in cui k_t e k_z sono parametri arbitrari, vincolati dalla condizione di separabilità

$$k_t^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (10.7)$$

La (10.6) è la stessa equazione trovata nel Cap. 7 per i due tipi di guide a variazione continua di indice di rifrazione. Si vede quindi che la propagazione lungo una qualunque struttura che si comporta da *linea di trasmissione* è descritta dalla stessa equazione, indipendentemente dalla natura e dalla forma della struttura stessa, con soluzione

$$Z(z) = C_1 e^{-jk_z z} + C_2 e^{jk_z z} \quad (10.8)$$

costituita dalla sovrapposizione di un'onda progressiva e di una (eventuale) onda riflessa.

Considerata la sola onda progressiva, i campi sono quindi dati da

$$\mathbf{E} = -C_1 \nabla_t T \times \mathbf{z}_0 e^{-jk_z z} \quad (10.9)$$

$$\mathbf{H} = \left[\frac{-C_1 k_z}{\omega\mu} \nabla_t T - \frac{C_1 \nabla_t^2 T}{j\omega\mu} \mathbf{z}_0 \right] e^{-jk_z z} \quad (10.10)$$

È da notare che anche l'equazione (*equazione caratteristica*) che la funzione trasversa T soddisfa è formalmente la stessa per ogni linea di trasmissione, ma la sua soluzione dipende dal tipo e dalla forma della sezione della struttura che guida il campo elettromagnetico.



Figura 10.1: Lamina con indice di rifrazione maggiore di quello dei mezzi contigui.

10.2 Modi guidati da lamina dielettrica

Consideriamo una lamina (struttura delimitata dai piani $y = \pm d$) di dielettrico omogeneo privo di dissipazioni e di costante ϵ_2 ($\mu \simeq \mu_0$) compresa tra due dielettrici indefiniti, anch'essi omogenei e non dissipativi, aventi costanti ϵ_1, μ_0 ed ϵ_3, μ_0 , rispettivamente (Fig. 10.1). Nel paragrafo 9.3 si è visto che quando un'onda incide da un mezzo più denso sul piano che lo separa da un mezzo meno denso, si può avere la riflessione totale dell'onda, che non trasferisce potenza al mezzo meno denso. Se $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ed $\epsilon_2 > \epsilon_3$, un'onda lanciata nella lamina può subire riflessione totale sia sulla parete superiore sia su quella inferiore e la potenza può rimanere confinata entro la lamina che *guiderà* quindi il campo.

Nel seguito, z è la direzione nella quale avviene la propagazione, mentre, per semplificare opportunamente l'analisi, il campo è assunto indipendente da x . Inoltre l'analisi è limitata alle sole onde *TE*. Come si vedrà, i risultati ottenuti con queste semplificazioni sono peraltro affatto indicativi di quelli che si otterrebbero con approcci più generali per strutture più complicate.

Dato che ciascuna regione di spazio

$$y < -d; \quad -d < y < d; \quad y > d$$

è omogenea, i campi elettrici e magnetici si derivano dalle corrispondenti espressioni ottenute nel paragrafo 10.1 per le onde *TE*:

$$E_{zi} = 0; \quad \mathbf{E}_{ti} = -\nabla_t T_i \times \mathbf{z}_0 e^{-jk_{zi}z}$$

$$H_{zi} = \frac{k_{ti}^2}{j\omega\mu_0} T_i e^{-jk_{zi}z}; \quad \mathbf{H}_{ti} = -\frac{k_{zi}}{\omega\mu_0} \nabla_t T_i e^{-jk_{zi}z} \quad i = 1, 2, 3$$

Le funzioni trasverse sono soluzioni delle *equazioni caratteristiche* per ciascuna delle tre regioni omogenee di spazio

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 T_1 + k_{t1}^2 T_1 &= 0 && \text{per } y < -d \\ \nabla_t^2 T_2 + k_{t2}^2 T_2 &= 0 && \text{per } -d < y < d \\ \nabla_t^2 T_3 + k_{t3}^2 T_3 &= 0 && \text{per } y > d \end{aligned}$$

Dato che limitiamo l'analisi a campi che non dipendono da x , cerchiamo autofunzioni indipendenti da x , per cui $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ e $T_i(x, y) \equiv Y_i(y)$

Nel semispazio 1, struttura indefinita in y , poniamo $k_{t1}^2 = -k_{y1}^2$ reale negativa, adatta a descrivere un'onda non uniforme, per cui l'equazione caratteristica diventa

$$\frac{d^2 Y_1}{dy^2} - k_{y1}^2 Y_1 = 0$$

con soluzione

$$Y_1(y) = C_{11} e^{-k_{y1} y} + C_{12} e^{k_{y1} y}$$

Viceversa nella regione 2, delimitata da discontinuità nella direzione y , ci si aspetta un'onda stazionaria, risultato delle riflessioni totali in corrispondenza delle interfacce, per cui poniamo $k_{t2}^2 = k_{y2}^2$ reale positiva, in modo che la soluzione della

$$\frac{d^2 Y_2}{dy^2} + k_{y2}^2 Y_2 = 0$$

risulti della forma

$$Y_2(y) = C_{21} \sin(k_{y2} y) + C_{22} \cos(k_{y2} y)$$

La regione 3 è ancora indefinita nella direzione y , per cui poniamo $k_{t3}^2 = -k_{y3}^2$ reale negativa e come soluzione della

$$\frac{d^2 Y_3}{dy^2} - k_{y3}^2 Y_3 = 0$$

otteniamo

$$Y_3(y) = C_{31} e^{-k_{y3} y} + C_{32} e^{k_{y3} y}$$

I campi nelle regioni 1 e 3 i non possono divergere, sicché per $y \rightarrow -\infty$, $\mathbf{E}, \mathbf{H} \rightarrow 0$ e quindi $T_1 \rightarrow 0$, ovvero $C_{11} = 0$ e

$$Y_1(y) = C_{12} e^{k_{y1} y}$$

mentre per $y \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}, \mathbf{H} \rightarrow 0$, $T_3 \rightarrow 0$, $C_{32} = 0$ e

$$Y_3(y) = C_{31} e^{-k_{y3} y}$$

Un'ulteriore ragionevole ipotesi è che il campo elettrico lanciato nella lamina dalla sorgente sia simmetrico rispetto al piano xz , ad esempio perché deriva per accoppiamento del modo fondamentale di una cavità laser con la lamina. Di conseguenza,

$$Y_2(y) = C_{21} \sin(k_{y2} y)$$

Con quest'ulteriore ipotesi, i campi saranno limitati a quelli delle sole onde TE simmetriche.

Come nel Cap. 9, sono state risolte le equazioni di Maxwell per ciascuna regione di spazio, indipendentemente dalla presenza delle altre. Affinché il campo così determinato (a pezzi) sia poi accettabile per la struttura globale, è necessario che i campi

parziali che possono esistere in ciascuna regione soddisfino i vincoli fisici (condizioni al contorno) in corrispondenza dei piani di separazione $y = \pm d$ tra le tre regioni di spazio. È quindi necessario che siano continui i componenti tangenziali (paralleli al piano xz) di campo elettrico e campo magnetico per tali valori di y . I componenti tangenziali ai piani che delimitano la lamina sono

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{t1} &= -C_{12}k_{y1}e^{k_{y1}y}e^{-jk_{z1}z}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{E}_{t2} &= -C_{21}k_{y2}\cos(k_{y2}y)e^{-jk_{z2}z}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{E}_{t3} &= C_{31}k_{y3}e^{-k_{y3}y}e^{-jk_{z3}z}\mathbf{x}_0 \\ \\ \mathbf{H}_{t1} &= \frac{-k_{y1}^2}{j\omega\mu_0}C_{12}e^{k_{y1}y}e^{-jk_{z1}z}\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{H}_{t2} &= \frac{k_{y2}^2}{j\omega\mu_0}C_{21}\sin(k_{y2}y)e^{-jk_{z2}z}\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{H}_{t3} &= \frac{-k_{y3}^2}{j\omega\mu_0}C_{31}e^{-k_{y3}y}e^{-jk_{z3}z}\mathbf{z}_0\end{aligned}$$

e le condizioni di continuità ai bordi ($y = -d$, $y = d$) della lamina

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{t1}(-d, z) &= \mathbf{E}_{t2}(-d, z), & \mathbf{H}_{t1}(-d, z) &= \mathbf{H}_{t2}(-d, z) \\ \mathbf{E}_{t2}(d, z) &= \mathbf{E}_{t3}(d, z), & \mathbf{H}_{t2}(d, z) &= \mathbf{H}_{t3}(d, z)\end{aligned}$$

La continuità pone un insieme di condizioni sia sulle costanti di propagazione dei campi nelle tre regioni, sia sulle ampiezze dei campi corrispondenti:

- (a) $k_{z1} = k_{z2} = k_{z3} = k_z \equiv \beta_z$
- (b) $-C_{12}k_{y1}e^{-k_{y1}d} = -C_{21}k_{y2}\cos(k_{y2}d)$
- (c) $\frac{k_{t1}^2}{j\omega\mu_0}C_{12}e^{-k_{y1}d} = -\frac{k_{t2}^2}{j\omega\mu_0}C_{21}\sin(k_{y2}d)$

Per le condizioni di separabilità, la condizione (a) si traduce in un vincolo tra le costanti k_{yi} , che danno il decadimento del campo con la distanza dai bordi della lamina ($i = 1, 3$) e la periodicità al suo interno ($i = 2$):

$$\begin{aligned}k_1^2 &= \omega^2\epsilon_1\mu_0 = -k_{y1}^2 + \beta_z^2 \\ k_2^2 &= \omega^2\epsilon_2\mu_0 = k_{y2}^2 + \beta_z^2 \\ k_3^2 &= \omega^2\epsilon_3\mu_0 = -k_{y3}^2 + \beta_z^2\end{aligned}$$

e quindi

$$k_1^2 + k_{y1}^2 = k_2^2 - k_{y2}^2$$

ovvero

$$k_{y1} = \sqrt{\omega^2\mu_0(\epsilon_2 - \epsilon_1) - k_{y2}^2}$$

Se, come normalmente avviene, $\epsilon_1 = \epsilon_3$, il campo elettrico è simmetrico in y anche oltre i bordi della lamina.

Un metodo spesso usato per imporre la continuità delle componenti tangenziali dei campi (b) e (c) consiste nell'uguagliare le *impedenze d'onda superficiali*. Definita l'impedenza d'onda superficiale nella direzione normale al piano delle componenti tangenziali

$$\eta_{yi} = \frac{E_{xi}}{H_{zi}}$$

la condizioni (b) e (c) portano a

$$\frac{E_{x1}}{H_{z1}} = \eta_{y1} = \frac{E_{x2}}{H_{z2}} = \eta_{y2}$$

cioè

$$\frac{C_{12}k_{y1}e^{-k_{y1}d}}{\frac{k_{y1}^2}{j\omega\mu_0}C_{12}e^{-k_{y1}d}} = \frac{C_{21}k_{y2}\cos(k_{y2}d)}{\frac{k_{y2}^2}{j\omega\mu_0}C_{21}\sin(k_{y2}d)}$$

In questo modo ci si svincola dalle ampiezze dei campi e si ottiene un'ulteriore condizione sulla costante trasversa k_{y2} . Infatti,

$$\frac{1}{k_{y1}} = \frac{\cos(k_{y2}d)}{k_{y2}\sin(k_{y2}d)}$$

ovvero

$$k_{y1}d = k_{y2}d \tan(k_{y2}d)$$

e quindi, per il legame tra k_{y1} e k_{y2} ,

$$\frac{\sqrt{(\omega^2\mu_0\Delta\epsilon)d^2 - k_{y2}^2d^2}}{k_{y2}d} = \tan(k_{y2}d) \quad (10.11)$$

La (10.11) è l'*equazione caratteristica* per gli autovalori k_{y2} che determinano la periodicità del campo *TE* simmetrico nella lamina. Essa è un'equazione trascendente che, oltre che numericamente, può essere risolta graficamente (Fig. 10.2).

A tal fine, posto $\zeta = k_{y2}d$, $\alpha^2 = (\omega^2\mu_0\Delta\epsilon)d^2$, i valori ammissibili di $k_{y2} = \frac{\zeta}{d}$ sono quelli in corrispondenza delle intersezioni dei rami di $\tan\zeta$ con la curva $\frac{\sqrt{\alpha^2 - \zeta^2}}{\zeta}$ relativa al particolare valore del parametro $\alpha = \omega\sqrt{\mu_0\Delta\epsilon}d$. Assegnata la lunghezza d'onda λ_0 della sorgente, lo spessore $2d$ della lamina e la differenza tra l'indice di rifrazione della lamina stessa e quello del dielettrico che la contorna, viene individuata una particolare curva $f(k_{y2}) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \zeta^2}}{\zeta}$. Questa interseca la funzione $\tan\zeta$ almeno in un punto, cui corrisponde il valore ζ^0 per il quale l'equazione caratteristica ha soluzione e quindi i campi soddisfano le condizioni al contorno. Da ζ^0 si ricava k_{y2} , determinando così la configurazione del campo entro la lamina dielettrica. Anche il suo andamento all'esterno, ovvero il corrispondente decadimento esponenziale per $y < -d$ e $y > d$, è determinato, dato che $k_{y1} = k_{y3} = \sqrt{\omega^2\mu_0\Delta\epsilon - k_{y2}^2}$. È così

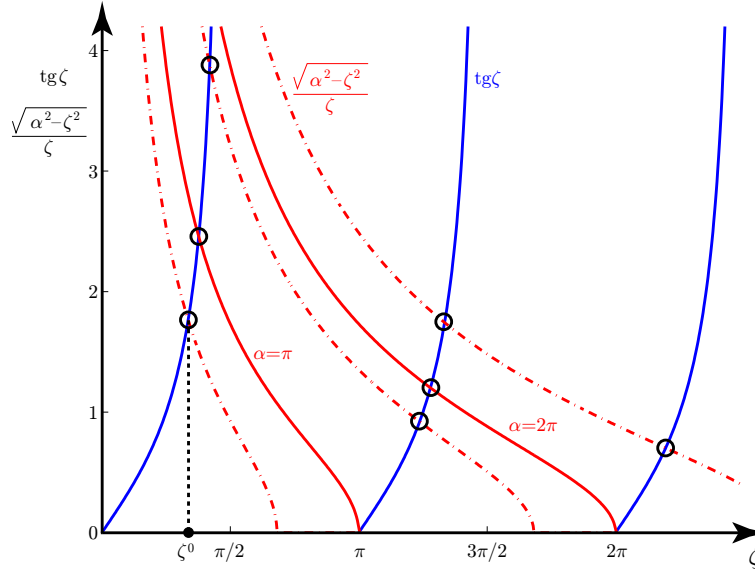


Figura 10.2: Gli autovalori k_{y2} si ottengono dai valori del parametro $\zeta = k_{y2} d$ ai quali i rami di $\tan \zeta$ intersecano la curva $\frac{\sqrt{\alpha^2 - \zeta^2}}{\zeta}$ corrispondente alla lunghezza d'onda, allo spessore della lamina e alla differenza tra gli indici di rifrazione interno ed esterno.

completamente determinato il *modo* guidato dalla lamina, mentre la costante con cui si propaga è data a sua volta da $\beta_z = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_2 - k_{y2}^2}$.

Il valore di $\omega \sqrt{\mu_0 \Delta \epsilon} d$ determina il numero di intersezioni tra le due funzioni e quindi il numero di modi: per $(m-1)\pi < \omega \sqrt{\mu_0 \Delta \epsilon} d < m\pi$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) si possono propagare m modi. Il valore di ciascun $k_{y2}^{(n)}$ dipende in maniera continua da λ_0 , il che vuol dire che lo spettro di modi è *continuo* e la configurazione del campo non è fissata solo dalla struttura, come è ad esempio per le guide d'onda metalliche, ma dipende anche dalla lunghezza d'onda (nel vuoto) di operazione. Il cut-off del modo (*TE* simmetrico) di ordine n si ha per valori di $\zeta = k_{y2} d$ per i quali

$$\frac{\sqrt{(\omega^2 \mu_0 \Delta \epsilon) d^2 - k_{y2}^2 d^2}}{k_{y2} d} = \tan(k_{y2} d) = 0$$

ovvero quando coesistono le condizioni

$$(\omega^2 \mu_0 \Delta \epsilon) - k_{y2}^2 = 0; \quad k_{y2} d = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.12)$$

La (10.12) fornisce la pulsazione di cut-off $\omega_c^{(n)}$ del modo (*TE* simmetrico) di ordine n :

$$\omega_c^{(n)} = \frac{n\pi}{d\sqrt{\mu_0 \Delta \epsilon}} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.13)$$

La (10.13) indica che il modo (TE simmetrico) dominante ha, in teoria, $f_c^{(0)} = 0$. È evidente che al diminuire della frequenza diminuiscono le costanti di attenuazione k_{y1} e k_{y3} , per cui il campo viene sempre meno confinato nei dintorni della lamina, ma tende a invadere tutto lo spazio, rendendo quindi praticamente irrealizzabile una guida dielettrica a “basse” frequenze. Il secondo modo inizia a propagarsi a partire da $f_c^{(1)} = \frac{1}{2d\sqrt{\mu_0\Delta\epsilon}}$ e quindi, a parità di spessore $2d$ della lamina, al diminuire della differenza $\epsilon_2 - \epsilon_1$ aumenta l'intervallo di frequenza nel quale si ha regime di propagazione monomodale. Ciò è di notevole importanza pratica, dato che, fissata la frequenza “centrale” $f_0 = \frac{\lambda_0}{c_0}$, ad esempio in base all'attenuazione e alla dispersione del materiale, lo spessore $2d_0$ della lamina che consenta la propagazione del solo modo dominante deve essere

$$2d_0 < \frac{1}{f_0\sqrt{\mu_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}} = \frac{1}{f_0\sqrt{\mu_0\epsilon_0\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_0}}}$$

ovvero

$$2d_0 < \frac{c_0}{f_0\sqrt{\Delta\epsilon'}} \simeq \frac{c_0}{f_0\sqrt{2\bar{n}\Delta n}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\bar{n}\Delta n}}$$

dove $\bar{n} = \frac{n_2 + n_1}{2}$. Si vede quindi che, a parità di λ_0 , lo spessore di una lamina che consenta propagazione guidata monomodale dipende inversamente dalla differenza tra l'indice di rifrazione della lamina e quello del mezzo che la contiene. Lo spessore aumenta all'avvicinarsi delle due costanti dielettriche. Aumenta inoltre la larghezza della banda nella quale la propagazione rimane monomodale.

10.2.0.1 Problema

Una lamina non dissipativa con costante dielettrica $\epsilon_2 = 1.96\epsilon_0$ e spessore $2d = 20 \mu\text{m}$ è immersa in un altro materiale non dissipativo con costante dielettrica $\epsilon_1 < \epsilon_2$.

- *Determinare*
 1. la costante dielettrica relativa ϵ'_1 affinché nella lamina si propaghi un solo modo (TE simmetrico) alla lunghezza d'onda “centrale” $\lambda_0 = 1.5 \mu\text{m}$;
 2. l'espressione del campo elettrico (con i valori numerici, a meno di una costante);
 3. l'espressione del campo magnetico;
 4. la lunghezza d'onda del campo che si propaga a tale λ_0 ;
 5. la velocità di fase;
 6. l'andamento della costante di propagazione β_z in funzione della lunghezza d'onda nei dintorni di λ_0 .
 7. la velocità di gruppo.
- *Disegnare*
 1. l'andamento del campo in funzione della coordinata trasversa;
- *Considerato un impulso gaussiano di durata iniziale $\tau(0)$ (scegliere valori significativi), determinarne l'aumento di durata dopo un percorso di 10 km, assumendo nulla la dispersione del materiale.*

10.2.1 Fibra monomodale con indice a gradino

Una fibra con variazione discontinua di indice di rifrazione (*step index*) è costituita da un cilindro dielettrico (*core*) immerso in un altro materiale con costante dielettrica minore (*cladding*). Pur essendo tale struttura di tipo cilindrico, alcune delle caratteristiche dei modi guidati sono simili a quelle dei modi guidati da una lamina e

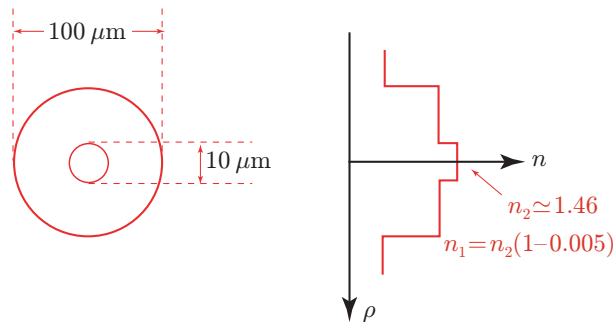


Figura 10.3: Esempio di fibra ottica a variazione discontinua di indice di rifrazione (dimensioni non in scala).

si trova che i risultati ottenuti in precedenza per quest'ultima sono indicativi di quelli che si ottengono per la fibra. In particolare, il diametro $2d_0$ del *core* che consente la propagazione di un solo modo a $\lambda_0 \simeq 1 \mu\text{m}$ per $\Delta n \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ è dell'ordine di

$$2d_0 \simeq \frac{10^{-6}}{\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}} = 10 \mu\text{m}$$

valore compatibile con esigenze di pratica realizzabilità. In una fibra monomodale di questo tipo la dispersione è dell'ordine di 10 ps km^{-1} .

10.3 Trasporto guidato dell'energia elettromagnetica

Un pacchetto d'onde (campo non monocromatico) trasportato lungo z da un modo guidato può essere trattato combinando il formalismo del paragrafo 6.2.1 con quello delle guide, tenuto conto che il campo si ottiene dal prodotto $Z(z)T(t_1, t_2)$ e l'eiconale $\Phi(s) \equiv k_z z$. La funzione T delle coordinate trasverse t_1, t_2 descrive la distribuzione del campo su una sezione della struttura e non influisce sulla caratterizzazione spaziotemporale del trasporto di potenza lungo la guida.

Assumiamo che in corrispondenza dell'ascissa iniziale $z = 0$ di una guida venga generato un campo non monocromatico $A(0, t)$ modulando una portante a pulsazione ω_0 con un segnale $a(t)$. Il campo ecciterà l'insieme dei modi guidati della struttura e, in particolare, il modo dominante, che in una struttura monomodale è l'unico a propagarsi. Le ampiezze dei modi di ordine superiore decadono esponenzialmente con

la distanza z dal punto di eccitazione, per cui, per z sufficientemente grandi, l'andamento spazio-temporale del campo è descritto dalla funzione longitudinale $Z(z, t)$ del modo dominante. La $Z(z, t)$ si ottiene dalla $Z(0, t)$ operando, come di consueto, nel dominio della frequenza.

Se $Z(0, \omega) = \mathcal{F}[a(0, t)]$ è lo spettro del segnale modulante $a(t)$, lo spettro del campo modulato associato al modo dominante è $Z(0, \omega - \omega_0) = C\mathcal{F}[A(0, t)]$. La costante C tiene conto della frazione di potenza che il generatore conferisce al modo dominante. Ciascuna componente spettrale della funzione longitudinale si propaga secondo

$$Z(z, \omega, \omega_0) = Z(0, \omega - \omega_0)e^{-jk_z(\omega)z}$$

ovvero, considerata la costante di propagazione del modo dominante al "centro" ω_0 della banda,

$$\begin{aligned} Z(z, \omega, \omega_0) &= Z(0, \omega - \omega_0)e^{-j[k_z(\omega) + k_z(\omega_0) - k_z(\omega_0)]z} \\ &= Z(0, \omega - \omega_0)e^{-j[k_z(\omega) - k_z(\omega_0)]z}e^{-jk_z(\omega_0)z} \end{aligned} \quad (10.14)$$

Nella (10.14) si può isolare l'involuppo del campo nel dominio della frequenza $\hat{A}(z, \omega, \omega_0)$ associato al modo dominante

$$\hat{A}(z, \omega, \omega_0) = Z(0, \omega - \omega_0)e^{-j[k_z(\omega) - k_z(\omega_0)]z} \quad (10.15)$$

che ne descrive l'andamento "lento" di ampiezza e fase con la distanza percorsa (vedi paragrafo 6.1).

10.3.1 Trasporto dell'involuppo

Per la definizione (10.15), derivando rispetto a z ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\hat{A} &= -j[k_z(\omega) - k_z(\omega_0)]Z(0, \omega - \omega_0)e^{-j[k_z(\omega) - k_z(\omega_0)]z} \\ &= -j[k_z(\omega) - k_z(\omega_0)]\hat{A} \end{aligned}$$

e, dopo espansione della costante di propagazione del modo dominante in serie di potenze con punto iniziale ω_0

$$k_z(\omega) \simeq k_z(\omega_0) + \left. \frac{dk_z}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k_z}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \quad (10.16)$$

la variazione longitudinale dell'involuppo soddisfa la

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{A}(z, \omega, \omega_0)}{\partial z} &\simeq -j \left(\frac{1}{u_g} \Delta\omega + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k_z}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \Delta\omega^2 \right) Z(0, \Delta\omega) e^{-j[k_z(\omega) - k_z(\omega_0)]z} \\ &\simeq -j \left(\frac{1}{u_g} \Delta\omega + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k_z}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \Delta\omega^2 \right) \hat{A}(z, \Delta\omega) \end{aligned}$$

L'andamento spazio-temporale del pacchetto d'onde guidate soddisfa la relazione che si ottiene mediante antitrasformazione dei termini della (10.17):

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} \simeq -j \left\{ \frac{1}{u_g} \mathcal{F}^{-1} [(\omega - \omega_0) \hat{A}(z, \Delta\omega)] + \frac{1}{2} \frac{d^2 k_z}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \mathcal{F}^{-1} [(\omega - \omega_0)^2 \hat{A}(z, \Delta\omega)] \right\} \quad (10.17)$$

ma, per le note proprietà della trasformata di Fourier

$$(\omega - \omega_0) \hat{A} = -j \mathcal{F} \left[\frac{\partial A}{\partial t} \right], \quad -(\omega - \omega_0)^2 \hat{A} = \mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right]$$

nella (10.17)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} [(\omega - \omega_0) \hat{A}] &= -j \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left[\frac{\partial A}{\partial t} \right] \right\} = -j \frac{\partial A}{\partial t} \\ \mathcal{F}^{-1} [(\omega - \omega_0)^2 \hat{A}] &= -\mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right] \right\} = -\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} \simeq -\frac{1}{u_g} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \frac{j}{2} \frac{d^2 k_z}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2}$$

che è una forma significativa dell'equazione del trasporto dell'involuppo. Si nota infatti che, nei limiti dell'approssimazione consentita dal troncamento dello sviluppo in serie (10.16), se $\frac{d^2 k_z}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} = 0$,

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} \simeq -\frac{1}{u_g} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t}$$

la variazione spaziale dell'involuppo è ovunque pari alla sua variazione temporale cambiata di segno e scalata per la velocità di gruppo: questo vuol dire che il pacchetto d'onde viaggia con velocità u_g senza modificarsi e non vi è quindi dispersione. Ma se $\frac{d^2 k_z}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \neq 0$, l'andamento spazio-temporale dell'involuppo trasportato dal modo dominante (*forma d'onda*) cambia con la distanza percorsa in ampiezza e fase, coerentemente con quanto trovato nel paragrafo 6.2.1.

10.4 Propagazione guidata in un mezzo non lineare

Se, per una causa generica, la costante dielettrica del materiale si discosta dal valore nominale, k_z varia di δk_z rispetto a tale valore. Assumiamo che quest'effetto sia indipendente dalla frequenza all'interno della banda (sufficientemente *stretta*) del campo elettromagnetico, sicché

$$k_z(\omega) \simeq k_z(\omega_0) + \frac{dk_z}{d\omega} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 k_z}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \delta k_z$$

Sotto queste ipotesi, l'equazione del trasporto diventa

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} \simeq -\frac{1}{v_g} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \frac{j}{2} \frac{d^2 k_z}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} - j\delta k_z A(z, t)$$

e contiene quindi un altro termine che va a sommarsi a quello di dispersione. In una fibra ottica ϵ può discostarsi dal valore nominale per effetto della non linearità del materiale. Infatti, dato che le densità di potenza possono essere molto elevate (per $W_T \simeq 1$ W, e le dimensioni tipiche della sezione retta di una fibra, $\mathcal{P} \simeq 10^{10}$ Wm⁻²), la polarizzazione indotta dal campo nel materiale può non essere funzione lineare del campo e la costante dielettrica contenere anche un termine quadratico nell'ampiezza del campo stesso, nel qual caso

$$\delta k_z = C|A(z, t)|^2 \quad (C > 0)$$

Di conseguenza

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -\frac{1}{v_g} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \frac{j}{2} \frac{d^2 k_z}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} - jC|A(z, t)|^2 A(z, t) \quad (10.18)$$

La (10.18) è la forma base di un'equazione di Schrödinger non lineare dipendente dal tempo. Come avviene in generale per i problemi non lineari, esistenza e natura delle soluzioni dipendono dai parametri e dalle caratteristiche iniziali, $A(0, t)$, del campo. Si trova che, se

- $\frac{d^2 k_z}{d\omega^2} \Big|_{\omega_0} < 0$, come si ha per $\lambda_0 > 1.3 \mu\text{m}$ nei materiali comunemente utilizzati
- $\mathcal{P} > \mathcal{P}_0$, se \mathcal{P}_0 denota una densità di potenza di soglia,

soluzione dell'equazione di Schrödinger non lineare è il *solitone del primo ordine*

$$A(z, t) = \sqrt{\frac{2}{C}} b \operatorname{sech} [b(\tilde{t} - \tilde{t}_0) + 2b\xi z_N] e^{j[(\xi^2 - b^2)z_N + \xi\tilde{t} - \gamma]} \quad (10.19)$$

con $\tilde{t} = t - \frac{z}{v_g}$ e $z_N = \frac{1}{2}k_z(\omega_0)z$.

Nella (10.19) $b, \tilde{t}_0, \xi, \gamma$ sono parametri che possono variare lentamente e periodicamente con la distanza percorsa. A parte tali eventuali variazioni *lente* dei parametri, si nota una caratteristica interessante del solitone: superata una distanza di soglia z_0 , esso diventa indipendente da z . Questo vuol dire che, benché la costante di propagazione k_z sia funzione non lineare della frequenza, la durata del pacchetto d'onde non varia con la distanza percorsa: la dispersione del modo guidato viene bilanciata dalla non linearità del materiale. L'energia elettromagnetica rimane intrappolata in una zona ristretta e, in linea di principio, consente quindi il trasporto di impulsi di breve durata anche in fibre multimodo su lunghe distanze. Tuttavia, dal momento che il controllo e la stabilità spazio-temporale degli impulsi dipendono in modo critico dalla loro energia e dalla loro durata iniziale, l'implementazione pratica di questa tecnica non sembra essere ancora consolidata.